

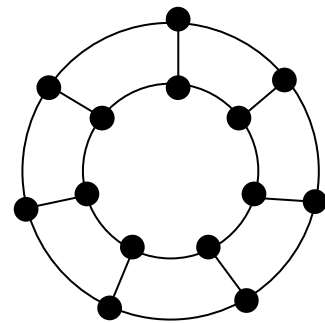
Algorithmique et graphes, thèmes du second degré

Feuille TD n° 1 – Exercices (Graphes)
éléments de correction

Exercice 1. Graphes 3-réguliers.

On constate aisément qu'il n'existe pas de graphes cubiques ayant un nombre impair de sommets : le nombre d'arêtes d'un graphe cubique à n sommets est $3n/2$ (la somme des degrés vaut $3n$ et est égale à deux fois le nombre d'arêtes). Or $3n/2$ n'est entier que lorsque n est pair.

On peut également montrer que pour tout n pair, $n \geq 4$, on peut construire un graphe 3-régulier à n sommets (voir figure ci-contre) : il suffit de dessiner deux cycles ayant $n/2$ sommets chacun, puis de relier les sommets « en vis-à-vis »...



Exercice 2. Graphes 4-réguliers.

Dans ce cas, le nombre d'arêtes vaut $4n/2 = 2n$, qui est bien un entier. On constate également qu'il existe des graphes 4-réguliers à n sommets pour tout $n \geq 5$: il suffit de prendre des sommets numérotés de 0 à $n-1$ et de relier, pour tout i , le sommet i aux sommets $i+1$ et $i+2$ (modulo n)... Le sommet i aura alors pour voisins $i-2$, $i-1$, $+1$ et $i+2$.

Exercice 3. Les six personnes.

Supposons tout d'abord qu'il existe une personne, disons A , en connaissant trois autres, disons B , C et D , et considérons les relations entre B , C et D ... Si deux d'entre elles se connaissent (par exemple B et C) alors elles forment avec A un trio de personnes se connaissant mutuellement. Dans le cas contraire, B , C et D forment un trio ne se connaissant pas.

Si aucune personne n'en connaît trois autres, on raisonne de façon symétrique en considérant la personne A et trois personnes qu'elle ne connaît pas : si ces trois personnes se connaissent mutuellement, c'est gagné. Sinon, deux personnes parmi ces trois ne se connaissant pas forment avec A un trio de personnes ne se connaissant pas...

Exercice 4. Les amis.

Construisons un graphe dont les sommets représentent les personnes et plaçons une arête entre deux sommets lorsque les personnes correspondantes sont amies. Dire que deux personnes ont le même nombre d'amis revient à dire que deux sommets dans le graphe ont même degré...

Nous allons montrer qu'il n'existe aucun graphe dont tous les sommets ont des degrés distincts. Supposons qu'un tel graphe existe et qu'il possède n sommets. Le degré maximal d'un sommet est donc $n-1$. Si tous les degrés des sommets sont distincts, on a donc nécessairement un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, ..., un sommet de degré $n-1$. Du fait de la présence d'un sommet de degré 0, disons x_0 , il est impossible d'avoir un sommet de degré $n-1$! (en effet, celui-ci devrait être relié à tous les autres, y compris x_0). On obtient ainsi une contradiction.

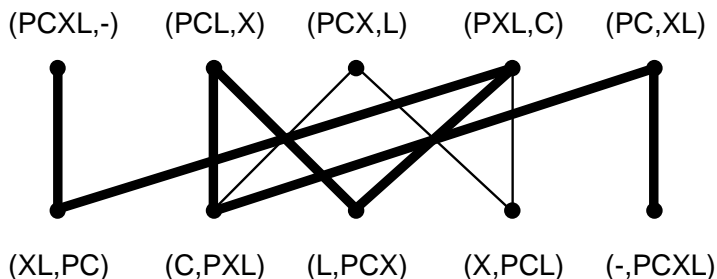
Exercice 5. Traversée du fleuve.

Cette situation peut être modélisée à l'aide d'un graphe. Désignons par P le passeur, par C la chèvre, par X le chou et par L le loup. Les sommets du graphe sont des couples précisant qui est sur la rive initiale, qui est sur

l'autre rive. Ainsi, le couple (PCX,L) signifie que le passeur est sur la rive initiale avec la chèvre et le chou (qui sont donc sous surveillance), alors que le loup est sur l'autre rive. Une arête relie deux sommets lorsque le passeur peut passer (sic) d'une situation à l'autre. En transportant la chèvre, le passeur passe par exemple du sommet (PCX,L) au sommet (X,PCL) . Le graphe ainsi obtenu est biparti : les sommets pour lesquels le passeur est sur la rive initiale ne sont reliés qu'aux sommets pour lesquels le passeur est sur l'autre rive...

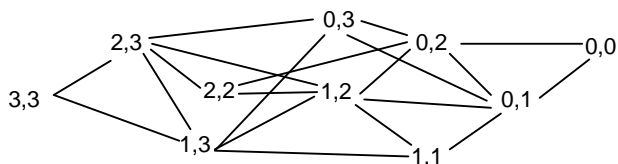
Naturellement, on ne considérera pas les sommets dont l'une des composantes est CX ou LC car ces situations sont interdites.

Il suffit ensuite de trouver un chemin (le plus court par exemple) entre la situation initiale $(PCXL,-)$ et la situation finale souhaitée $(-,PCXL)$. La figure suivante donne un tel chemin :



Exercice 6. Jeu de Fan Tan.

Le jeu avec 2 tas de trois allumettes est décrit par le graphe suivant (tous les arcs sont orientés de gauche à droite) :



Le joueur qui atteint la configuration $0,0$ perd la partie. Pour gagner, on doit donc atteindre la configuration $0,1$ ou $0,2$. On peut vérifier qu'en jouant $1,3$ au premier coup, quelle que soit la réponse de l'adversaire, on peut atteindre ensuite $0,1$ ou $0,2$. Le coup gagnant au départ est donc « enlever 2 allumettes dans un tas ».

De façon plus générale, on peut définir les notions de position gagnante et position perdante. Une position est gagnante si, quoi que fasse son adversaire, le joueur qui doit jouer peut gagner la partie. Une position est perdante si, quoi que fasse le joueur qui doit jouer, son adversaire peut gagner la partie. Ainsi, une position est perdante si et seulement si tous ses successeurs sont des positions gagnantes et une position est gagnante si et seulement si l'un au moins de ses successeurs est une position perdante ou, comme dans notre exemple, il s'agit de la dernière position $(0,0)$.

On peut alors « étiqueter » chaque position perdante ou gagnante en « remontant » dans le graphe :

